جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني ٢٠١٥-٢٠١٦
أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة و نصف
العلامة:(١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (٢٠ درجة):

اثبت أن كل مجموعة شبه متراصة في فضاء خطي منظم تكون محدودة أما في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدودة هي شبه متراصة

السؤال الثاني (١٢+١٢=٢٤ درجة):

أ)- ليكن $K(x,t)=\alpha\sin(x-t)$ ، اثبت أنه من أجل كل تابع $g(x)$ يوجد تابع $f(x)$

بحيث يكون :
$$f(x)=g(x)+\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

ب)- لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث : $A_n:\ell_2\to\ell_2$

وان $A_n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n,0,0,0,\dots)$

اثبت أن هذه المتتالية متراصة ، ولكن نهايتها $\lim_{n\to\infty}A_n$ مؤثر غير متراص .

السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- عرف المؤثر الايزومتري ،ثم بين الفرق بينه وبين المؤثر الوحدي ، وأثبت أن مقلوب مؤثر ايزومتري هو بحد ذاته مؤثر ايزومتري .

ب)- اذا كان T مؤثرا خطياً ويحقق العلاقة : $(Tf,Tf)=(f,f)$ أثبت أن المؤثر T يكون وحدياً.

السؤال الرابع (١٢+١٢=٢٤ درجة):

أ)- ليكن H فضاء هيلبرت وبفرض $A:H\to H$ مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتياً أثبت أن :
$$\sigma_r(A)=\phi$$

ب)- أثبت إذا كان H فضاء هيلبرت وكان $A:H\to H$ مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتياً فإن طيفه حقيقي أيضاً أي $\sigma(A)\subset R$.

السؤال الخامس (١٢ درجة):

ليكن H فضاء هيلبرت وليكن المؤثر المترافق ذاتياً $A\in L(H)$ (خطي ومحدود من H إلى H)
وبفرض $m=\inf_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle$ و $M=\sup_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle$ أثبت أن : $\sigma(A)\subset[m,M]$

انتهت الأسئلة
مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

مدرس المقرر
الدكتور سامح العرجة

حمص ٢٠١٦/٧/١٠ م.

جامعة البعث	امتحانات الفصل الثاني ٢٠١٥ـ٢٠١٦	المدة : ساعة و نصف
كلية العلوم	أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)	العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	الاسم :

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أثبت أن كل مجموعة شبه متراصة في فضاء خطي منظم تكون محدودة أما في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدودة هي شبه متراصة.

السؤال الثاني (١٢+١٢=٢٤ درجة) :

أ)- ليكن $K(x,t)=\alpha\sin(x-t)$ ، أثبت أنه من أجل كل تابع $g(x)$ يوجد تابع $f(x)$

بحيث يكون :
$$f(x)=g(x)+\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

ب)- لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث : $A_n:\ell_2\to\ell_2$

وأن $A_n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n,0,0,0,\dots)$

أثبت أن هذه المتتالية متراصة ، ولكن نهايتها $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ مؤثر غير متراص .

السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- عرف المؤثر الايزومتري ،ثم بين الفرق بينه وبين المؤثر الوحدي ، وأثبت أن مقلوب مؤثر ايزومتري هو بحد ذاته مؤثر ايزومتري .

ب)- اذا كان T مؤثرا خطياً ويحقق العلاقة : $(Tf,Tf)=(f,f)$ وكان $D(T)=R(T)=H$
أثبت أن المؤثر T يكون وحدياً.

السؤال الرابع (١٢+١٢=٢٤ درجة):

أ)- ليكن H فضاء هيلبرت وبفرض $A:H\to H$ مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتياً أثبت أن :

$$\sigma_r(A)=\phi$$

ب)- أثبت إذا كان H فضاء هيلبرت وكان $A:H\to H$ مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتياً فإن طيفه حقيقي أيضاً أي $\sigma(A)\subset R$.

السؤال الخامس (١٢ درجة):

ليكن H فضاء هيلبرت وليكن المؤثر المترافق ذاتياً $A\in L(H)$ (خطي ومحدود من H إلى H)
وبفرض $m=\inf\limits_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle$ و $M=\sup\limits_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle$ أثبت أن : $\sigma(A)\subset[m,M]$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

حمص ١٠/ ٧ /٢٠١٦ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق الدكتور سامح العرجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
امتحانات الفصل الثاني ٢٠١٥-٢٠١٦
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة و نصف
العلامة:(١٠٠) درجة

جواب السؤال الأول (٢٠ درجة):

لتكن M مجموعة شبه متراصة في الفضاء الخطي المنظم X ولنفرض جدلاً أنها غير محدودة ، عندئذٍ توجد متتالية من عناصر M ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق $n=1,2,..$ ، $\|x_n\|>n$ ولكن M شبه متراصة فرضاً وبالتالي توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وهذا تناقض مع $n=1,2,..$ ، $\|x_n\|>n$ وهو المطلوب .

5
5

الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدودة هي شبه متراصة ، وخاصة إذا كان الفضاء غير منتهي الأبعاد يبينه المثال الآتي :

في الفضاء $X=\ell_2$ لدينا المجموعة $M=\{e_1,e_2,...\}$ حيث $e_1=(1,0,0,...)$ و $e_2=(0,1,0,...)$ وهكذا ، واضح أن هذه المجموعة محدودة لأن $k=1,2,...$ ، $\|e_k\|=1$ ولكن هذه المجموعة ليست شبه متراصة لأن :

5

وذلك أياً كان $k,i=1,2,...$ ، $\|e_k-e_i\|^2=2=\|e_k\|^2+\|e_i\|^2$ وبالتالي فإن $\|e_k-e_i\|\longrightarrow\sqrt{2}\neq 0$ ، أي أنه لا يمكن الحصول على متتالية جزئية متقاربة من المتتالية M (5 لأنها ليست متتالية أساسية وبالتالي ليست متقاربة) .

جواب السؤال الثاني (١٢+١٢=٢٤ درجة) :

أ)- لنأخذ المؤثر

$$A:C[0,1]\longrightarrow C[0,1]:f\mapsto Af:Af(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$ 4

فإن هذا المؤثر خطي ومحدود :

خطي لأن :

4

$$A(af+bg)(x)=\int_a^b K(x,y)(af+bg)(y)dy=\int_a^b K(x,y)af(y)dy+\int_a^b K(x,y)bg(y)dy=$$

$$=a\int_a^b K(x,y)f(y)dy+b\int_a^b K(x,y)g(y)dy=aAf(x)+bAg(x)=(aAf+bAg)(x)$$

$$\Rightarrow\ A(af+bg)=aAf+bAg$$

ومحدود لأن :

$$\|Af\| = \max_{x\in[0,1]}|Af(x)| = \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right| \le \max_{x\in[0,1]}|K(x,y)|\max_{x\in[0,1]}|f(x)| =$$

$$= \max_{x\in[0,1]}|\alpha \sin(x-t)|\|f\| \le |\alpha|\|f\|$$

وبما أن A خطي ومحدود فإن $(I-A)^{-1}$ موجود ومحدود وبالتالي وبما أن

$$f = g + Af \;\Rightarrow\; f - Af = g \;\Rightarrow\; (I-A)f = g \;\Rightarrow\; f = (I-A)^{-1}g$$

وبالتالي يكون f موجود وهو المطلوب .

ب)- ليكن لدينا $c>0$ وبالتالي $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell_2$, $c=1$, $\|A_n x\|_{\ell_2} \le c\|x\|_{\ell_2}$

فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $x \neq 0 \in X$ ينقل كل مجموعة محدودة M في ℓ_2 المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد ($\ell_2^{(n)}$ الإيزومورفي مع C^n) وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراصة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراصة .

نهاية هذه المتتالية $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = \lim\limits_{n\to\infty} (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = x = Ix$ وبما أن المؤثر I غير متراص في الفضاء غير المنتهي البعد (لاحظ أن تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر I هو تقارب نقطي وليس بانتظام لذلك المبرهنة (إذا كان X فضاءً خطياً منظماً و B فضاء باناخ ، وكانت $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المؤثرات الخطية المتراصة حيث $A_n : X \to B$ وبفرض أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة (بانتظام) من مؤثر A عندئذٍ A متراص) لم تنطبق .

في هذا المثال لوجدنا أن : $\|(I-A_n)x\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2}$ وبالتالي :

$$\|I - A_n\|_{\ell_2} = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in\ell_2}} \frac{\|(I-A)x\|_{\ell_2}}{\|x\|_{\ell_2}} = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولذلك قلنا إن التقارب نقطي وليس بانتظام.

جواب السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- ليكن H_1, H_2 فضاءي هيلبرت ، نسمي المؤثر V المعرف على H_1 $(D(V)=H_1)$ الذي يطبق H_1 على H_2 $(R(V)=H_2)$ مؤثر ايزومتري إذا كان : $\langle vf, vg\rangle_2 = \langle f, g\rangle_1$ من أجل جميع $f,$

g من H_1 . المؤثر الوحدي هو حالة خاصة من المؤثر الايزومتري ونحصل عليه إذا تطابق الفضاءان H_1 و H_2 ($H_2 \equiv H_1$).

إثبات المقلوب : بما أن الشط اللازم والكافي لوجود مقلوب مؤثر هو أن تؤدي المساواة $Tf = Tg$ الى أن $f = g$ لذلك نفرض أن $Vf = Vg$ عندئذ يكون :

$$0 = \langle Vf - Vg, Vf - Vg \rangle_2 = \langle Vf, Vf \rangle_2 - \langle Vf, Vg \rangle_2 - \langle Vg, Vf \rangle_2 + \langle Vg, Vg \rangle_2 =$$
$$\langle f, f \rangle_1 - \langle f, g \rangle_1 - \langle g, f \rangle_1 + \langle g, g \rangle_1 = \langle f - g, f - g \rangle_1$$

أي أن $f = g$ وبذلك يكون المؤثر V^{-1} موجوداً. وبما أن $D(V^{-1}) = R(V)$ وأن $R(V^{-1}) = D(V)$ فإن المؤثر V^{-1} كالمؤثر معرف على H_2 ويطبقه في H_1 .
إذا فرضنا أن $Vf = f'$ & $Vg = g'$ فمن تعريف المؤثر الايزومتري يكون

$$\langle f', g' \rangle_2 = \langle v^{-1}f, v^{-1}g \rangle_1$$

وهذا ما يثبت أن V^{-1} ايزومتري حيث f, g كيفيان من H_1.

ومن أجل جميع العناصر f, g من H_1 يكون $\langle vf, g \rangle = \langle f, v^{-1}g \rangle_1$ لنضع $v^{-1}g = g'$ وبالتالي $g = Vg'$ وبذلك يكون $\langle Vf, g \rangle = \langle Vf, Vg' \rangle = \langle f, g' \rangle = \langle f, v^{-1}g \rangle$.

ب) – لدينا اولاً $D(T) = R(T) = H$ وحسب الفرض يكون :

$$\langle T(f + \alpha g), T(f + \alpha g) \rangle = \langle f + \alpha g, f + \alpha g \rangle$$

وبما أن T خطي فإن :

$$\langle Tf, Tf \rangle + \alpha \langle Tg, Tf \rangle + \bar{\alpha} \langle Tf, Tg \rangle + |\alpha|^2 \langle Tg, Tg \rangle$$
$$= \langle f, f \rangle + \alpha \langle g, f \rangle + \bar{\alpha} \langle f, g \rangle + |\alpha|^2 \langle g, g \rangle$$

وحسب الفرض $\alpha \langle Tg, Tf \rangle + \bar{\alpha} \langle Tf, Tg \rangle = \alpha \langle g, f \rangle + \bar{\alpha} \langle f, g \rangle$ وبما أن α كيفي فإن : $\langle Tf, Tg \rangle = \langle f, g \rangle$ وهذا ما يثبت أن T مؤثر وحدي .

جواب السؤال الرابع (١٢+١٢=٢٤ درجة):

ا)- نفرض جدلاً أن $\sigma_r(A) \neq \phi$ وبالتالي يوجد $\lambda \in \sigma_r(A)$ بحيث $A - \lambda I$ موجود ومعرف على مجموعة غير كثيفة في H وبالتالي $D(A - \lambda I)^{-1}$ مجموعة غير كثيفة في H وبالتالي $\overline{D(A - \lambda I)^{-1}} \neq H$ ولكن : $H = \overline{D(A - \lambda I)^{-1}} \oplus \overline{D(A - \lambda I)^{-1}}^{\perp}$

وبالتالي يوجد عنصر $y \neq 0 \in H, y \perp \overline{D(A - \lambda I)^{-1}}$

ولكن $D(A - \lambda I)^{-1} = R(A - \lambda I)$ وبالتالي $0 \neq x \in H$ ، $\langle (A - \lambda I)x, y \rangle = 0$ وبما أن A مترافق ذاتياً فإن $\bar{\lambda} = \lambda$ وبالتالي :

$$\langle x, (A - \lambda I)y \rangle = \langle x, Ay \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle - \lambda \langle x, y \rangle = \langle (A - \lambda I)x, y \rangle = 0$$

4 وبالتالي $x=(A-\lambda I)y$ أي أن $y=(A-\lambda I)^{-1}x$ وبالتالي $\|(A-\lambda I)y\|=\|Ay-\lambda y\|=0$ وبما أن $y\neq 0$ من الفرض فإن $Ay=\lambda y$ وبالتالي λ قيمة خاصة أي $\lambda\in\sigma_p(A)$ وهذا تناقض مع الفرض $\lambda\in\sigma_r(A)$ (لأن $\sigma_p(A)$ و $\sigma_r(A)$ منفصلتان) إذن $\sigma_r(A)=\phi$.

4 ب)- ليكن $\beta\neq 0$ ، $\lambda=\alpha+i\beta\in\rho(A)$ وبما أن $C=\rho(A)\cup\sigma(A)$ فإذا كان $x\neq 0$ فإن

$$\langle (A-\lambda I)x,x\rangle=\underbrace{\langle Ax,x\rangle}_{\in R}-\lambda\langle x,x\rangle$$

$$\overline{\langle (A-\lambda I)x,x\rangle}=\langle Ax,x\rangle-\overline{\lambda}\langle x,x\rangle$$

4 بالطرح نجد :

$$\overline{\langle (A-\lambda I)x,x\rangle}-\langle (A-\lambda I)x,x\rangle=(\lambda-\overline{\lambda})\|x\|^2=2i\beta\|x\|^2$$

$$-2i\,\mathrm{Im}\langle (A-\lambda I)x,x\rangle=2i\beta\|x\|^2$$

$$|\beta|.\|x\|^2=|\mathrm{Im}\langle (A-\lambda I)x,x\rangle|\leq|\langle (A-\lambda I)x,x\rangle|\leq\|(A-\lambda I)x\|.\|x\|$$

$$|\beta|.\|x\|\leq\|(A-\lambda I)x\|$$

4 فمن أجل $\beta\neq 0$ ومن المتراجحة الأخيرة يوجد $c=|\beta|>0$ يحقق $c\|x\|\leq\|(A-\lambda I)x\|$

وحسب مبرهنة سابقة إذا تحقق هذا الشرط فإن $\lambda\in\rho(A)$. وبالتالي من أجل $\beta=0$ فإن $\lambda\in\sigma(A)$ وهو المطلوب.

جواب السؤال الخامس (١٢ درجة) :

3 بما أن A مترافق ذاتياً فإن $\langle Ax,x\rangle$ حقيقي و $\sigma(A)\subset R$ وحتى نثبت أن $\sigma(A)\subset[m,M]$ يكفي أن نثبت أنه إذا كانت $\lambda>M$ أو $\lambda<m$ فإن $\lambda\in\rho(A)$. **لنبرهن أولاً** أنه إذا كانت $\lambda>M$ فإن $\lambda\in\rho(A)$ ، ليكن $x\neq 0\in H$ فإذا أخذنا $u=\frac{x}{\|x\|}$ فإن $\|u\|=1$ وبالتالي يمكن للحصول على أي عنصر $x\neq 0\in H$ من العلاقة $x=\|x\|u$ ويكون لدينا :

$$\langle Ax,x\rangle=\langle A(\|x\|u),\|x\|u\rangle=\|x\|\langle\|x\|A(u),u\rangle=\|x\|^2\langle Au,u\rangle\leq\|x\|^2\sup_{\|u\|=1}\langle Au,u\rangle=\|x\|^2M$$

وبالتالي $-\langle Ax,x\rangle\geq-\langle x,x\rangle M$ فلو أخذنا $c=\lambda-M>0$ فإنه يكون لدينا :

$c\|x\|^2 = (-M+\lambda)\langle x,x\rangle = -M\langle x,x\rangle + \lambda\langle x,x\rangle \le -\langle Ax,x\rangle + \lambda\langle x,x\rangle = -(\langle (A-\lambda I)x,x\rangle$ أي أن

$c\|x\|^2 \le |\langle (A-\lambda I)x,x\rangle|$ من أجل أي عنصر $x \in H$ وبالتالي $c\|x\|^2 \le |\langle (A-\lambda I)x,x\rangle| \le \|(A-\lambda I)\|\|x\|$

وبالتالي : $\|(A-\lambda I)\| \ge \|x\|$ وهذا يعني حسب المبرهنة السابقة أن $\lambda \in \rho(A)$.

3

__لنبرهن الآن__ أنه إذا كانت $\lambda < m$ فإن $\lambda \in \rho(A)$ ، ليكن $x \ne 0 \in H$ فإذا أخذنا $u = \frac{x}{\|x\|}$ فإن

$\|u\| = 1$ وبالتالي يمكن للحصول على أي عنصر $x \ne 0 \in H$ من العلاقة $x = \|x\|u$ ويكون لدينا :

$$\langle Ax,x\rangle = \langle A(\|x\|u), \|x\|u\rangle = \|x\|\langle \|x\| A(u), u\rangle = \|x\|^2\langle Au,u\rangle \ge \|x\|^2 \inf_{\|u\|=1}\langle Au,u\rangle = \|x\|^2 m$$

3

فلو أخذنا $c = m - \lambda > 0$ فإنه يكون لدينا :

$$c\|x\|^2 = (M-\lambda)\langle x,x\rangle = M\langle x,x\rangle - \lambda\langle x,x\rangle \ge \langle Ax,x\rangle + \lambda\langle x,x\rangle = \langle (A-\lambda I)x,x\rangle$$

أي أن $c\|x\|^2 \le |\langle (A-\lambda I)x,x\rangle|$ من أجل أي عنصر $x \in H$ وبالتالي :

$c\|x\|^2 \le |\langle (A-\lambda I)x,x\rangle| \le \|(A-\lambda I)\|\|x\|$ وبالتالي : $\|(A-\lambda I)\| \ge \|x\|$

وهذا يعني حسب المبرهنة السابقة أن $\lambda \in \rho(A)$.

3

وبالتالي مما سبق ينتج أن $\lambda \in \rho(A) \Leftarrow \lambda > M \quad or \quad \lambda < m$ بأخذ نفي الاقتضاء السابق نجد $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda > m \quad and \quad \lambda < M$ وهذا يعني أن $\sigma(A) \subset [m, M]$ وهو المطلوب.

حمص في ١٠/ ٧ / ٢٠١٦ م.　　　　انتهت الإجابات　　　　مدرس المقرر

د. سامح العرجة